

Circuit RLC en régime libre
Oscillations électriques

Analogie électromécanique

Analogie électromécanique

Oscillations électriques du RLC



oscillations mécaniques d'un système
solide ressort avec frottements

Analogie électromécanique

Oscillations électriques du RLC



oscillations mécaniques d'un système
solide ressort avec frottements

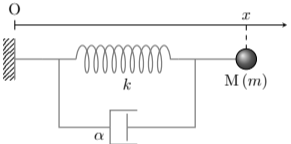
Mécanique	Electricité

Analogie électromécanique

Oscillations électriques du RLC



oscillations mécaniques d'un système solide ressort avec frottements

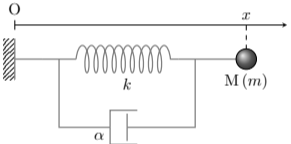
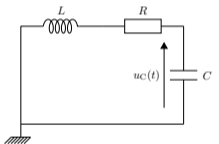
Mécanique	Electricité
	

Analogie électromécanique

Oscillations électriques du RLC



oscillations mécaniques d'un système solide ressort avec frottements

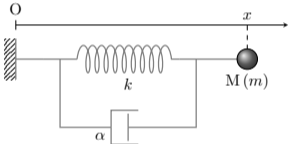
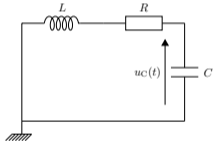
Mécanique	Electricité
	

Analogie électromécanique

Oscillations électriques du RLC



oscillations mécaniques d'un système solide ressort avec frottements

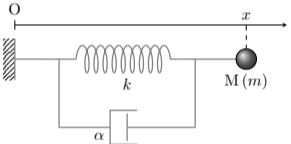
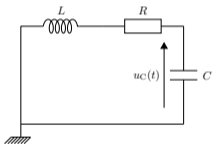
Mécanique	Electricité
	
Etude de la position $x(t)$	

Analogie électromécanique

Oscillations électriques du RLC



oscillations mécaniques d'un système solide ressort avec frottements

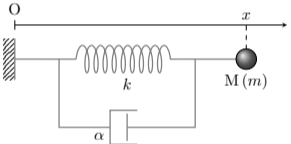
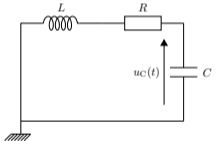
Mécanique	Electricité
	
Etude de la position $x(t)$	Etude de la tension $u_C(t)$

Analogie électromécanique

Oscillations électriques du RLC



oscillations mécaniques d'un système solide ressort avec frottements

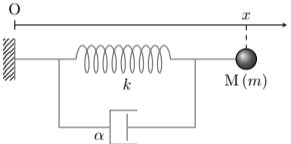
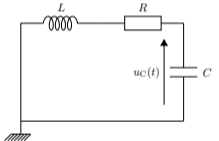
Mécanique	Electricité
	
Etude de la position $x(t)$	Etude de la tension $u_C(t)$
Frottements : α	

Analogie électromécanique

Oscillations électriques du RLC



oscillations mécaniques d'un système solide ressort avec frottements

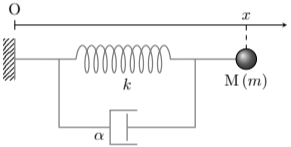
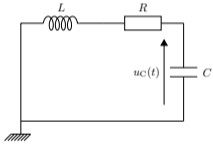
Mécanique	Electricité
	
Etude de la position $x(t)$	Etude de la tension $u_C(t)$
Frottements : α	Résistance : R

Analogie électromécanique

Oscillations électriques du RLC



oscillations mécaniques d'un système solide ressort avec frottements

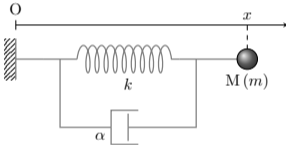
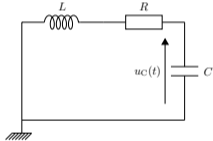
Mécanique	Electricité
	
Etude de la position $x(t)$	Etude de la tension $u_C(t)$
Frottements : α	Résistance : R
PFD	

Analogie électromécanique

Oscillations électriques du RLC



oscillations mécaniques d'un système solide ressort avec frottements

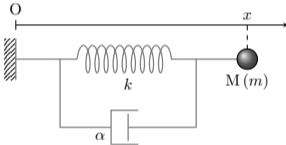
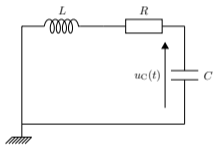
Mécanique	Electricité
	
Etude de la position $x(t)$	Etude de la tension $u_C(t)$
Frottements : α	Résistance : R
PFD $\implies \ddot{x} + \frac{\alpha}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0$	

Analogie électromécanique

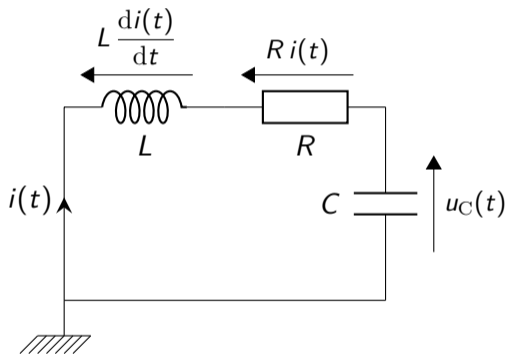
Oscillations électriques du RLC



oscillations mécaniques d'un système solide ressort avec frottements

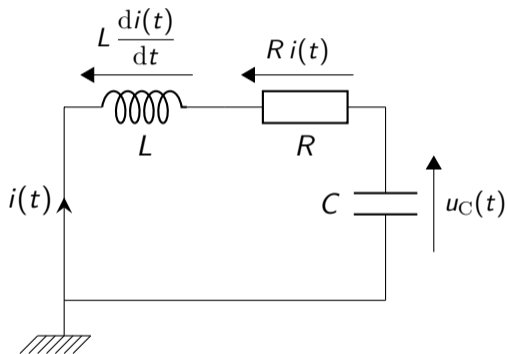
Mécanique	Electricité
	
Etude de la position $x(t)$	Etude de la tension $u_C(t)$
Frottements : α	Résistance : R
PFD $\implies \ddot{x} + \frac{\alpha}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0$?

Equation différentielle du RLC



Equation différentielle du RLC

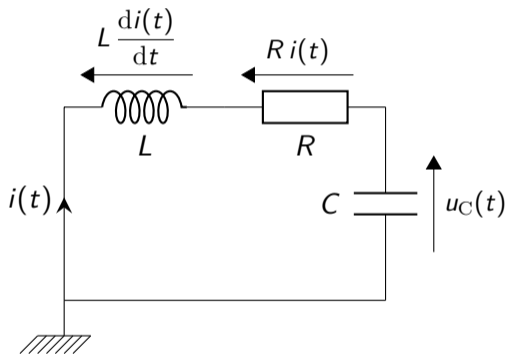
Loi des mailles



Equation différentielle du RLC

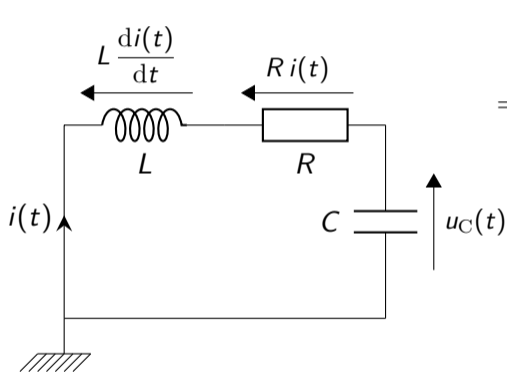
Loi des mailles

$$u_C(t) + R i(t) + L \frac{di(t)}{dt} = 0$$



Equation différentielle du RLC

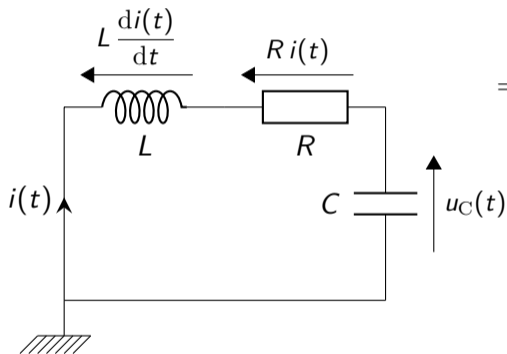
Loi des mailles



$$u_C(t) + R i(t) + L \frac{di(t)}{dt} = 0$$
$$\Rightarrow u_C(t) + R C \frac{du_C(t)}{dt} + L \frac{d}{dt} \left(C \frac{du_C(t)}{dt} \right) = 0$$

Equation différentielle du RLC

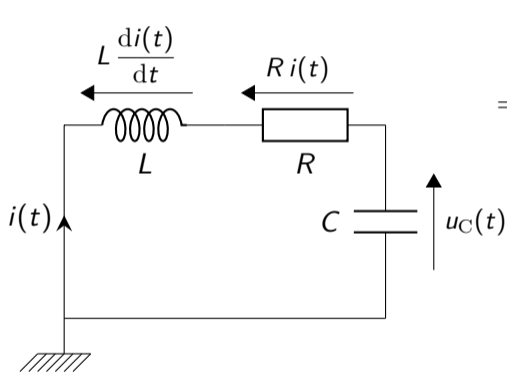
Loi des mailles



$$\begin{aligned} u_C(t) + Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} &= 0 \\ \Rightarrow u_C(t) + RC \frac{du_C(t)}{dt} + L \frac{d}{dt} \left(C \frac{du_C(t)}{dt} \right) &= 0 \\ \Rightarrow LC \ddot{u}_C(t) + RC \dot{u}_C(t) + u_C(t) &= 0 \end{aligned}$$

Equation différentielle du RLC

Loi des mailles



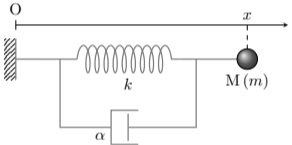
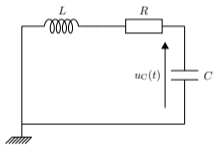
$$\begin{aligned}u_C(t) + Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} &= 0 \\ \Rightarrow u_C(t) + RC \frac{du_C(t)}{dt} + L \frac{d}{dt} \left(C \frac{du_C(t)}{dt} \right) &= 0 \\ \Rightarrow LC \ddot{u}_C(t) + RC \dot{u}_C(t) + u_C(t) &= 0 \\ \Rightarrow \ddot{u}_C(t) + \frac{R}{L} \dot{u}_C(t) + \frac{1}{LC} u_C(t) &= 0\end{aligned}$$

Analogie électromécanique

Oscillations électriques du RLC



oscillations mécaniques d'un système solide ressort avec frottements

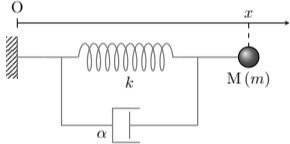
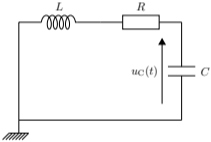
Mécanique	Electricité
	
Etude de la position $x(t)$	Etude de la tension $u_C(t)$
Frottements : α	Résistance : R
PFD $\implies \ddot{x} + \frac{\alpha}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0$?

Analogie électromécanique

Oscillations électriques du RLC

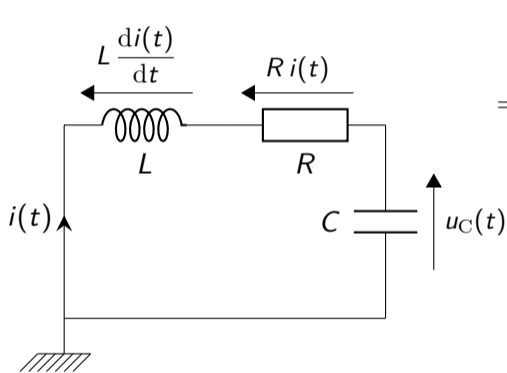


oscillations mécaniques d'un système solide ressort avec frottements

Mécanique	Electricité
	
Etude de la position $x(t)$	Etude de la tension $u_C(t)$
Frottements : α	Résistance : R
PFD $\implies \ddot{x} + \frac{\alpha}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0$	Mailles $\implies \ddot{u}_C(t) + \frac{R}{L}\dot{u}_C(t) + \frac{1}{LC}u_C(t) = 0$

Equation différentielle du RLC

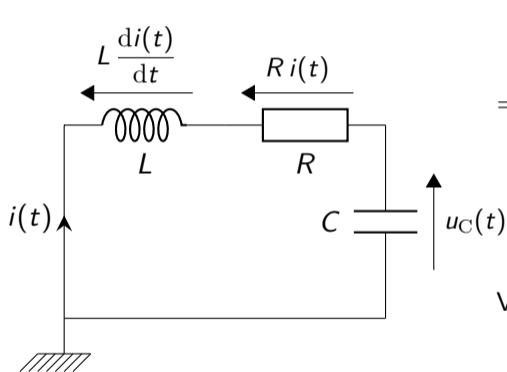
Loi des mailles



$$\begin{aligned}u_C(t) + Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} &= 0 \\ \Rightarrow u_C(t) + RC \frac{du_C(t)}{dt} + L \frac{d}{dt} \left(C \frac{du_C(t)}{dt} \right) &= 0 \\ \Rightarrow LC \ddot{u}_C(t) + RC \dot{u}_C(t) + u_C(t) &= 0 \\ \Rightarrow \ddot{u}_C(t) + \frac{R}{L} \dot{u}_C(t) + \frac{1}{LC} u_C(t) &= 0\end{aligned}$$

Equation différentielle du RLC

Loi des mailles

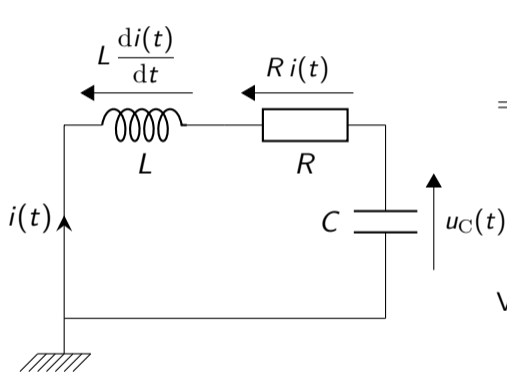


$$u_C(t) + Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} = 0$$
$$\Rightarrow u_C(t) + RC \frac{du_C(t)}{dt} + L \frac{d}{dt} \left(C \frac{du_C(t)}{dt} \right) = 0$$
$$\Rightarrow LC \ddot{u}_C(t) + RC \dot{u}_C(t) + u_C(t) = 0$$
$$\Rightarrow \ddot{u}_C(t) + \frac{R}{L} \dot{u}_C(t) + \frac{1}{LC} u_C(t) = 0$$

Variables réduites :

Equation différentielle du RLC

Loi des mailles



$$u_C(t) + Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} = 0$$

$$\Rightarrow u_C(t) + RC \frac{du_C(t)}{dt} + L \frac{d}{dt} \left(C \frac{du_C(t)}{dt} \right) = 0$$

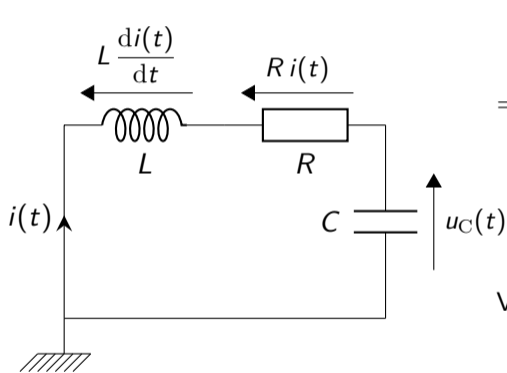
$$\Rightarrow LC \ddot{u}_C(t) + RC \dot{u}_C(t) + u_C(t) = 0$$

$$\Rightarrow \ddot{u}_C(t) + \frac{R}{L} \dot{u}_C(t) + \frac{1}{LC} u_C(t) = 0$$

$$\text{Variables réduites : } 2\lambda = \frac{R}{L}$$

Equation différentielle du RLC

Loi des mailles



$$u_C(t) + Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} = 0$$

$$\Rightarrow u_C(t) + RC \frac{du_C(t)}{dt} + L \frac{d}{dt} \left(C \frac{du_C(t)}{dt} \right) = 0$$

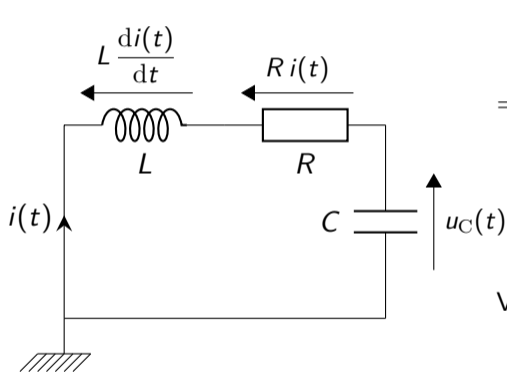
$$\Rightarrow LC \ddot{u}_C(t) + RC \dot{u}_C(t) + u_C(t) = 0$$

$$\Rightarrow \ddot{u}_C(t) + \frac{R}{L} \dot{u}_C(t) + \frac{1}{LC} u_C(t) = 0$$

Variables réduites : $2\lambda = \frac{R}{L}$ et

Equation différentielle du RLC

Loi des mailles



$$u_C(t) + Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} = 0$$

$$\Rightarrow u_C(t) + RC \frac{du_C(t)}{dt} + L \frac{d}{dt} \left(C \frac{du_C(t)}{dt} \right) = 0$$

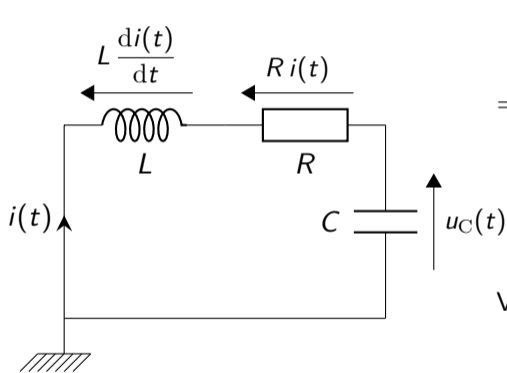
$$\Rightarrow LC \ddot{u}_C(t) + RC \dot{u}_C(t) + u_C(t) = 0$$

$$\Rightarrow \ddot{u}_C(t) + \frac{R}{L} \dot{u}_C(t) + \frac{1}{LC} u_C(t) = 0$$

$$\text{Variables réduites : } 2\lambda = \frac{R}{L} \quad \text{et} \quad \omega_0^2 = \frac{1}{LC}$$

Equation différentielle du RLC

Loi des mailles



$$u_C(t) + Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} = 0$$

$$\Rightarrow u_C(t) + RC \frac{du_C(t)}{dt} + L \frac{d}{dt} \left(C \frac{du_C(t)}{dt} \right) = 0$$

$$\Rightarrow LC \ddot{u}_C(t) + RC \dot{u}_C(t) + u_C(t) = 0$$

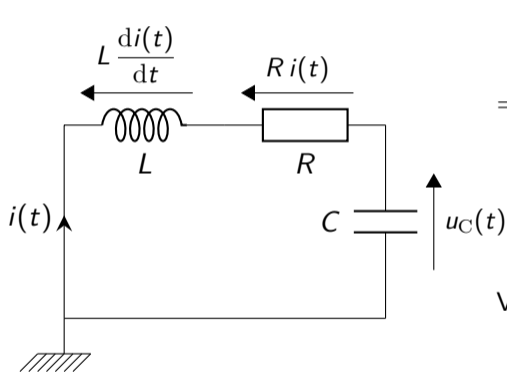
$$\Rightarrow \ddot{u}_C(t) + \frac{R}{L} \dot{u}_C(t) + \frac{1}{LC} u_C(t) = 0$$

Variables réduites : $2\lambda = \frac{R}{L}$ et $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$

$$\boxed{\ddot{u}_C(t) + 2\lambda \dot{u}_C(t) + \omega_0^2 u_C(t) = 0}$$

Equation différentielle du RLC

Loi des mailles



$$\begin{aligned} u_C(t) + R i(t) + L \frac{di(t)}{dt} &= 0 \\ \Rightarrow u_C(t) + R C \frac{du_C(t)}{dt} + L \frac{d}{dt} \left(C \frac{du_C(t)}{dt} \right) &= 0 \\ \Rightarrow L C \ddot{u}_C(t) + R C \dot{u}_C(t) + u_C(t) &= 0 \\ \Rightarrow \ddot{u}_C(t) + \frac{R}{L} \dot{u}_C(t) + \frac{1}{LC} u_C(t) &= 0 \end{aligned}$$

Variables réduites : $2\lambda = \frac{R}{L}$ et $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$

$$\ddot{u}_C(t) + 2\lambda \dot{u}_C(t) + \omega_0^2 u_C(t) = 0$$

Equation du deuxième ordre sans second membre

Résolution de l'équation différentielle : différents régimes

$$\ddot{u}_C(t) + 2\lambda \dot{u}_C(t) + \omega_0^2 u_C(t) = 0$$

Résolution de l'équation différentielle : différents régimes

$$\ddot{u}_C(t) + 2\lambda \dot{u}_C(t) + \omega_0^2 u_C(t) = 0$$

Equation caractéristique

Résolution de l'équation différentielle : différents régimes

$$\ddot{u}_C(t) + 2\lambda \dot{u}_C(t) + \omega_0^2 u_C(t) = 0$$

Equation caractéristique \implies

Résolution de l'équation différentielle : différents régimes

$$\ddot{u}_C(t) + 2\lambda \dot{u}_C(t) + \omega_0^2 u_C(t) = 0$$

Equation caractéristique $\implies r^2 + 2\lambda r + \omega_0^2 = 0$

Résolution de l'équation différentielle : différents régimes

$$\ddot{u}_C(t) + 2\lambda \dot{u}_C(t) + \omega_0^2 u_C(t) = 0$$

Equation caractéristique $\implies r^2 + 2\lambda r + \omega_0^2 = 0$

Différents régimes selon le discriminant :

Résolution de l'équation différentielle : différents régimes

$$\ddot{u}_C(t) + 2\lambda \dot{u}_C(t) + \omega_0^2 u_C(t) = 0$$

Equation caractéristique $\implies r^2 + 2\lambda r + \omega_0^2 = 0$

Différents régimes selon le discriminant :

- frottements négligeables

Résolution de l'équation différentielle : différents régimes

$$\ddot{u}_C(t) + 2\lambda \dot{u}_C(t) + \omega_0^2 u_C(t) = 0$$

Equation caractéristique $\implies r^2 + 2\lambda r + \omega_0^2 = 0$

Différents régimes selon le discriminant :

- frottements négligeables ($\lambda \ll \omega_0$)

Résolution de l'équation différentielle : différents régimes

$$\ddot{u}_C(t) + 2\lambda \dot{u}_C(t) + \omega_0^2 u_C(t) = 0$$

Equation caractéristique $\implies r^2 + 2\lambda r + \omega_0^2 = 0$

Différents régimes selon le discriminant :

- frottements négligeables ($\lambda \ll \omega_0$) $\iff \Delta < 0$: régime pseudo-périodique

Résolution de l'équation différentielle : différents régimes

$$\ddot{u}_C(t) + 2\lambda \dot{u}_C(t) + \omega_0^2 u_C(t) = 0$$

Equation caractéristique $\implies r^2 + 2\lambda r + \omega_0^2 = 0$

Différents régimes selon le discriminant :

- frottements négligeables ($\lambda \ll \omega_0$)
 - $\iff \Delta < 0$: régime pseudo-périodique
 - \implies Oscillations électriques

Résolution de l'équation différentielle : différents régimes

$$\ddot{u}_C(t) + 2\lambda \dot{u}_C(t) + \omega_0^2 u_C(t) = 0$$

Equation caractéristique $\implies r^2 + 2\lambda r + \omega_0^2 = 0$

Différents régimes selon le discriminant :

- frottements négligeables ($\lambda \ll \omega_0$)
 $\iff \Delta < 0$: régime pseudo-périodique
 \implies Oscillations électriques
- frottements critiques

Résolution de l'équation différentielle : différents régimes

$$\ddot{u}_C(t) + 2\lambda \dot{u}_C(t) + \omega_0^2 u_C(t) = 0$$

Equation caractéristique $\implies r^2 + 2\lambda r + \omega_0^2 = 0$

Différents régimes selon le discriminant :

- frottements négligeables ($\lambda \ll \omega_0$) $\iff \Delta < 0$: régime pseudo-périodique
 \implies Oscillations électriques
- frottements critiques ($\lambda = \omega_0$)

Résolution de l'équation différentielle : différents régimes

$$\ddot{u}_C(t) + 2\lambda \dot{u}_C(t) + \omega_0^2 u_C(t) = 0$$

Equation caractéristique $\implies r^2 + 2\lambda r + \omega_0^2 = 0$

Différents régimes selon le discriminant :

- frottements négligeables ($\lambda \ll \omega_0$) $\iff \Delta < 0$: régime pseudo-périodique
 \implies Oscillations électriques
- frottements critiques ($\lambda = \omega_0$) $\iff \Delta = 0$: régime critique

Résolution de l'équation différentielle : différents régimes

$$\ddot{u}_C(t) + 2\lambda \dot{u}_C(t) + \omega_0^2 u_C(t) = 0$$

Equation caractéristique $\implies r^2 + 2\lambda r + \omega_0^2 = 0$

Différents régimes selon le discriminant :

- frottements négligeables ($\lambda \ll \omega_0$)
 $\iff \Delta < 0$: régime pseudo-périodique
 \implies Oscillations électriques
- frottements critiques ($\lambda = \omega_0$)
 $\iff \Delta = 0$: régime critique
 \implies retour à l'équilibre le plus rapide

Résolution de l'équation différentielle : différents régimes

$$\ddot{u}_C(t) + 2\lambda \dot{u}_C(t) + \omega_0^2 u_C(t) = 0$$

Equation caractéristique $\implies r^2 + 2\lambda r + \omega_0^2 = 0$

Différents régimes selon le discriminant :

- frottements négligeables ($\lambda \ll \omega_0$)
 $\iff \Delta < 0$: régime pseudo-périodique
 \implies Oscillations électriques
- frottements critiques ($\lambda = \omega_0$)
 $\iff \Delta = 0$: régime critique
 \implies retour à l'équilibre le plus rapide
- frottements importants

Résolution de l'équation différentielle : différents régimes

$$\ddot{u}_C(t) + 2\lambda \dot{u}_C(t) + \omega_0^2 u_C(t) = 0$$

Equation caractéristique $\implies r^2 + 2\lambda r + \omega_0^2 = 0$

Différents régimes selon le discriminant :

- frottements négligeables ($\lambda \ll \omega_0$)
 $\iff \Delta < 0$: régime pseudo-périodique
 \implies Oscillations électriques
- frottements critiques ($\lambda = \omega_0$)
 $\iff \Delta = 0$: régime critique
 \implies retour à l'équilibre le plus rapide
- frottements importants ($\lambda \gg \omega_0$)

Résolution de l'équation différentielle : différents régimes

$$\ddot{u}_C(t) + 2\lambda \dot{u}_C(t) + \omega_0^2 u_C(t) = 0$$

Equation caractéristique $\implies r^2 + 2\lambda r + \omega_0^2 = 0$

Différents régimes selon le discriminant :

- frottements négligeables ($\lambda \ll \omega_0$)
 $\iff \Delta < 0$: régime pseudo-périodique
 \implies Oscillations électriques
- frottements critiques ($\lambda = \omega_0$)
 $\iff \Delta = 0$: régime critique
 \implies retour à l'équilibre le plus rapide
- frottements importants ($\lambda \gg \omega_0$)
 $\iff \Delta > 0$: régime aperiodique

Facteur de qualité et régimes

Facteur de qualité et régimes

$$Q = \frac{\omega_0}{2\lambda} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

Facteur de qualité et régimes

$$Q = \frac{\omega_0}{2\lambda} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

- $Q > \frac{1}{2} \implies$ régime pseudo-périodique ;

Facteur de qualité et régimes

$$Q = \frac{\omega_0}{2\lambda} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

- $Q > \frac{1}{2} \implies$ régime pseudo-périodique ;
- $Q = \frac{1}{2} \implies$ régime critique ;

Facteur de qualité et régimes

$$Q = \frac{\omega_0}{2\lambda} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

- $Q > \frac{1}{2} \implies$ régime pseudo-périodique ;
- $Q = \frac{1}{2} \implies$ régime critique ;
- $Q < \frac{1}{2} \implies$ régime apériodique ;

Résolution de l'équation différentielle : solutions

$$\ddot{u}_C(t) + 2\lambda \dot{u}_C(t) + \omega_0^2 u_C(t) = 0$$

Equation caractéristique $\implies r^2 + 2\lambda r + \omega_0^2 = 0$

Résolution de l'équation différentielle : solutions

$$\ddot{u}_C(t) + 2\lambda \dot{u}_C(t) + \omega_0^2 u_C(t) = 0$$

$$\text{Equation caractéristique} \implies r^2 + 2\lambda r + \omega_0^2 = 0$$

- Les solutions r_1, r_2 de l'équation caractéristique permettent d'obtenir les solutions de l'équation différentielle ;

Résolution de l'équation différentielle : solutions

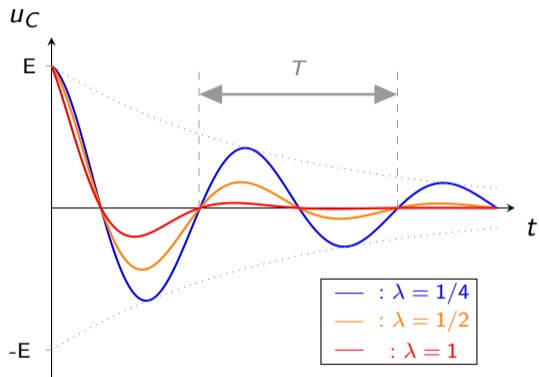
$$\ddot{u}_C(t) + 2\lambda \dot{u}_C(t) + \omega_0^2 u_C(t) = 0$$

$$\text{Equation caractéristique} \implies r^2 + 2\lambda r + \omega_0^2 = 0$$

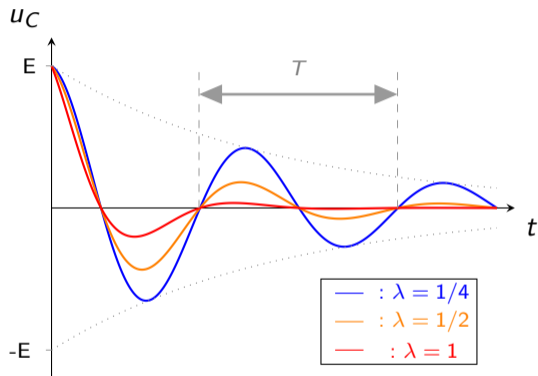
- Les solutions r_1, r_2 de l'équation caractéristique permettent d'obtenir les solutions de l'équation différentielle ;
- Selon le régime (donc le discriminant de l'équation caractéristique), $r_{1,2}$ peuvent être réelles ou complexes, ce qui donne différents types de solutions $u_C(t)$.

Régime pseudo-périodique

Régime pseudo-périodique



Régime pseudo-périodique

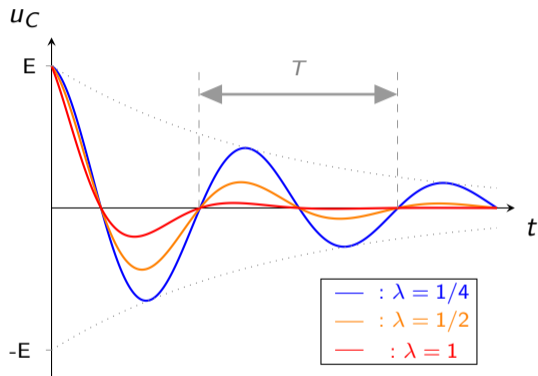


$$u_C(t) = E \exp(-\lambda t) \cos(\omega t + \phi)$$

$$\text{avec } \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$$

et E la tension initiale aux bornes du condensateur.

Régime pseudo-périodique



$$u_C(t) = E \exp(-\lambda t) \cos(\omega t + \phi)$$

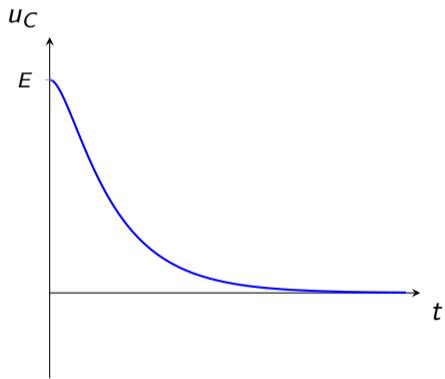
$$\text{avec } \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$$

et E la tension initiale aux bornes du condensateur.

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}}$$

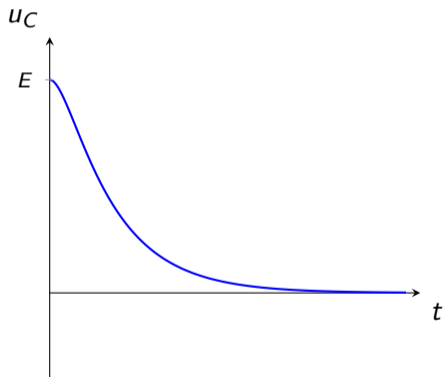
Régime critique

Régime critique



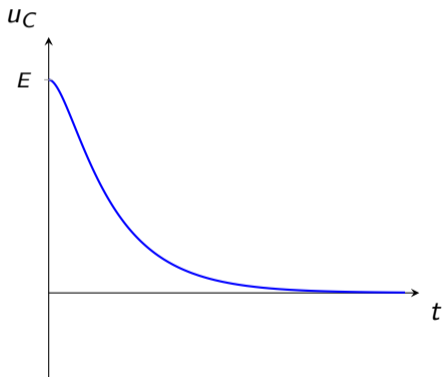
Régime critique

$$u_C(t) = (A t + B) \exp(-\lambda t)$$



Régime critique

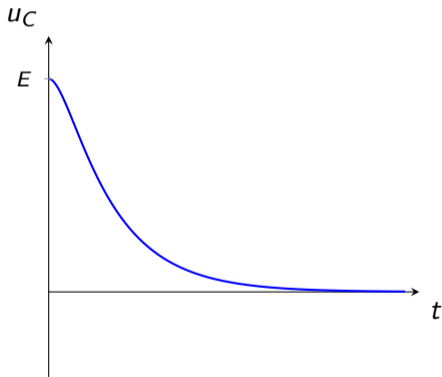
$$u_C(t) = (A t + B) \exp(-\lambda t)$$



Régime critique = premier régime apériodique.

Régime critique

$$u_C(t) = (A t + B) \exp(-\lambda t)$$

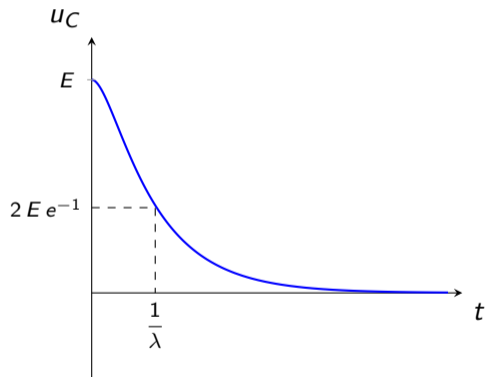


Régime critique = premier régime apériodique.

Obtention graphique de λ

Régime critique

$$u_C(t) = (A t + B) \exp(-\lambda t)$$



Régime critique = premier régime apériodique.

Obtention graphique de λ

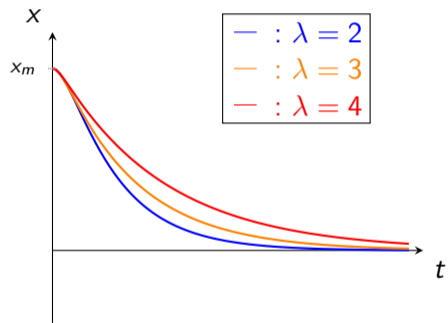
D'après l'expression mathématique de la solution ci-dessus :

$$\text{à } t = \frac{1}{\lambda}, u_C = 2 E e^{-1}$$

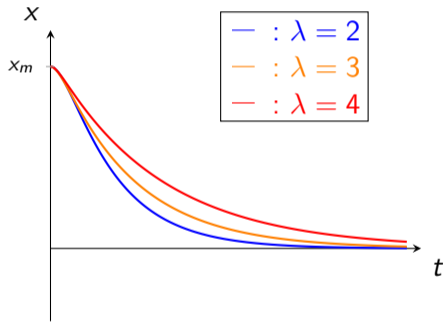
où E est la tension initiale aux bornes du condensateur.

Régimes apériodiques

Régimes apériodiques

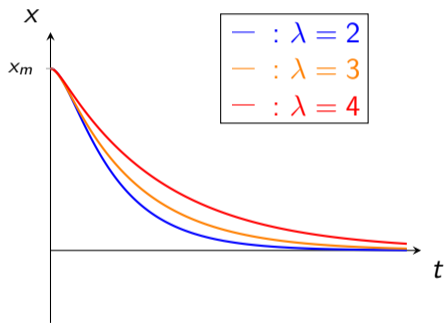


Régimes apériodiques



$$u_C(t) = A \exp\left(\left(-\lambda + \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}\right) t\right) + B \exp\left(\left(-\lambda - \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}\right) t\right)$$

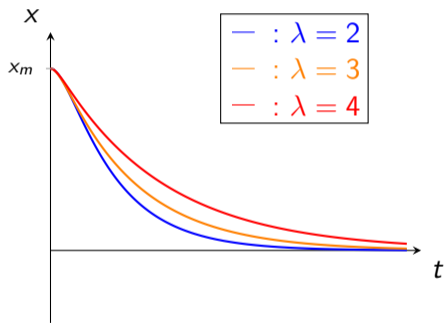
Régimes apériodiques



$$u_C(t) = A \exp \left(\left(-\lambda + \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2} \right) t \right) + B \exp \left(\left(-\lambda - \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2} \right) t \right)$$

Pas d'oscillations électriques

Régimes apériodiques



$$u_C(t) = A \exp \left(\left(-\lambda + \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2} \right) t \right) + B \exp \left(\left(-\lambda - \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2} \right) t \right)$$

Pas d'oscillations électriques

Retour à l'équilibre d'autant plus lent que λ est grand